Intersection de deux droites paramétriques

On a deux droites paramétriques définies par un point de la droite (qui sera mon point d'application) et un vecteur directeur de la droite (qui représentera ma droite d'action).

Pour le point **A (ax ; ay)** et le vecteur $\vec{U} = \left| \begin{matrix} Ux \\ Uy \\ 0 \end{matrix} \right.$

On obtient l'équation paramétrique de la première droite qui est :

$X1(T) = ax + Ux.T$
$Y1(T) = ay + Uy.T$

Pour le point **B (bx ; by)** et le vecteur $\vec{V} = \left| \begin{matrix} Vx \\ Vy \\ 0 \end{matrix} \right.$

On obtient l'équation paramétrique de la seconde droite qui est :

$X2(T') = bx + Vx.T'$
$Y2(T') = by + Vy.T'$

Notez que les deux équations ont des variables paramétriques T et T' différentes.
A l'intersection **I (ix ; iy)** de ces deux droites, les coordonnées sont identiques.
On peut donc écrire :

$X1(T) = X2(T')$ cela donne : $ax + Ux.T = bx + Vx.T'$
$Y1(T) = Y2(T')$ $\qquad ay + Uy.T = by + Vy.T'$

$Ux.T - Vx.T' = bx - ax$
$Uy.T - Vy.T' = by - ay$

En utilisant la résolution de système d'équation par addition on trouve T puis T' :

$Ux.T - Vx.T' = bx - ax$
$Uy.T - Vy.T' = by - ay$

$$\begin{aligned} \mathbf{Vy}.Ux.T - \mathbf{Vy}.Vx.T' &= \mathbf{Vy}.(bx-ax) \\ \underline{+ (\mathbf{-Vx}).Uy.T - (\mathbf{-Vx}).Vy.T'} &\underline{= (\mathbf{-Vx}).(by-ay)} \\ (Vy.Ux - Vx.Uy).T &= Vy.(bx-ax)-Vx.(by-ay) \end{aligned}$$

$$T = \frac{Vy.(bx-ax)-Vx.(by-ay)}{(Vy.Ux - Vx.Uy)}$$

$Ux.T - Vx.T' = bx - ax$
$Uy.T - Vy.T' = by - ay$

$$\begin{aligned} \mathbf{Uy}.Ux.T - \mathbf{Uy}.Vx.T' &= \mathbf{Uy}.(bx-ax) \\ \underline{+ (\mathbf{-Ux}).Uy.T - (\mathbf{-Ux}).Vy.T'} &\underline{= (\mathbf{-Ux}).(by-ay)} \\ (-Uy.Vx+Ux.Vy).T' &= Uy.(bx-ax)-Ux.(by-ay) \end{aligned}$$

$$T' = \frac{Uy.(bx-ax)-Ux.(by-ay)}{(-Uy.Vx+Ux.Vy)}$$

Il reste à remplacer T par sa valeur dans X1(T) et Y1(T) ou remplacer T' par sa valeur dans X2(T') et Y2(T') pour vérifier que l'on trouve bien les mêmes coordonnées qui sont celles du point d'intersection I.

Les coordonnées de I (ix ; iy) seront donc :

Calcul avec T :

$$xi = X1(T) = ax + Ux.T$$

$$xi = ax + Ux.\frac{(Vy.(bx - ax)-Vx.(by-ay))}{(Vy.Ux - Vx.Uy)}$$

$$yi = Y1(T) = ay + Uy.T$$

$$yi = ay + Uy.\frac{(Vy.(bx - ax)-Vx.(by-ay))}{(Vy.Ux - Vx.Uy)}$$

Calcul avec T’ :

$$xi = X2(T') = bx + Vx.T'$$

$$xi = bx + Vx.\frac{(Uy.(bx-ax)-Ux.(by-ay))}{(-Uy.Vx+Ux.Vy)}$$

$$yi = Y2(T') = by + Vy.T'$$

$$yi = by + Vy.\frac{(Uy.(bx-ax)-Ux.(by-ay))}{(-Uy.Vx+Ux.Vy)}$$